با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۱) پایه دهم
فصل سوم

عنوان فصل: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

از صفحه‌ی ۴۷ تا صفحه‌ی ۶۸ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل توان‌های گویا و عبارت‌های جبری آمده است.

مباحث فصل: ریشه و توان، ریشهٔ nام، توان‌های گویا، عبارت‌های جبری

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۴۸ · فعالیت — تساوی توانی و تساوی رادیکالی ۶

۲ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — طول ضلع مکعب به حجم ۲۵ ۶

۳ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — جایگاه ریشه‌ها بین دو عدد صحیح متوالی ۶

۴ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — روش دو دانش‌آموز برای یافتن ضلع مکعب ۷

۵ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — ریشه‌ها روی محور اعداد ۸

۶ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — جای خالی زیر رادیکال ۸

۷ صفحه ۵۰ · کار در کلاس — سه مکعب تو در تو ۸

۸ صفحه ۵۰ · فعالیت — ریشهٔ چهارم ۹

۹ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — جدول ریشه‌های چهارم ۹

۱۰ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — جدول ریشه‌های پنجم ۹

۱۱ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — ریشهٔ پنجم برابر با خودش ۱۰

۱۲ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — محاسبهٔ ریشهٔ پنجم ۱۰

۱۳ صفحه ۵۱ · کار در کلاس — تکمیل عبارت دربارهٔ ریشهٔ پنجم ۱۰

۱۴ صفحه ۵۱ · تمرین — جایگاه ریشه‌ها بین دو عدد صحیح ۱۰

۱۵ صفحه ۵۲ · تمرین — مقدار تقریبی رادیکال‌ها ۱۱

۱۶ صفحه ۵۲ · تمرین — وصل کردن نقطه‌ها به ریشهٔ سوم ۱۲

۱۷ صفحه ۵۲ · تمرین — مقایسهٔ a و ریشهٔ سوم a ۱۲

۱۸ صفحه ۵۲ · تمرین — رنگ ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم ۱۳

۱۹ صفحه ۵۳ · تمرین — تکمیل جاهای خالی دربارهٔ ریشه‌ها ۱۳

۲۰ صفحه ۵۳ · تمرین — مقایسهٔ عددهای توان‌دار و رادیکالی ۱۴

۲۱ صفحه ۵۴ · فعالیت — ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ ۱۴

۲۲ صفحه ۵۴ · فعالیت — ریشه‌های مختلف عدد منفی ۶۴- ۱۵

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳ صفحه ۵۵ · فعالیت — جدول تعداد ریشه‌های nام ۱۵
۲۴ صفحه ۵۵ · فعالیت — ریشهٔ حاصل‌ضرب ۱۶
۲۵ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — محاسبهٔ ریشه‌ها ۱۶
۲۶ صفحه ۵۵ · کار در کلاس — محاسبهٔ $\sqrt[5]{32}$ با ضرب رادیکال‌ها ۱۷
۲۷ صفحه ۵۶ · تمرین — درستی رابطهٔ $\sqrt[m]{(a^m)(\sqrt[k]{a})} = \sqrt[k]{a}$ ۱۷
۲۸ صفحه ۵۶ · فعالیت — $\sqrt[n]{(a^n)}$ ۱۸
۲۹ صفحه ۵۷ · فعالیت — $\sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})}$ ۱۸
۳۰ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — چه زمانی تساوی برقرار نیست ۱۹
۳۱ صفحه ۵۷ · تمرین — مقایسه با توجه به ریشه و توان ۱۹
۳۲ صفحه ۵۷ · تمرین — مقایسهٔ توان‌های اعداد منفی ۱۹
۳۳ صفحه ۵۸ · تمرین — اثبات $\sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})} = a$ ۲۰
۳۴ صفحه ۵۸ · تمرین — ریشهٔ مجموع ۲۰
۳۵ صفحه ۵۸ · تمرین — ریشهٔ ضرب و تقسیم ۲۰
۳۶ صفحه ۵۸ · تمرین — ریشهٔ خارج‌قسمت ۲۱
۳۷ صفحه ۶۰ · فعالیت — توان‌های کسری با صورت ۱ ۲۱
۳۸ صفحه ۶۰ · فعالیت — توان‌های کسری و رادیکال ۲۲
۳۹ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — توان کسری و رادیکال ۲۲
۴۰ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — رادیکال به توان کسری ۲۲
۴۱ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — ریشهٔ ریشه ۲۳
۴۲ صفحه ۶۱ · تمرین — توان کسری به رادیکال ۲۳
۴۳ صفحه ۶۱ · تمرین — توان‌های برابر ۲۳
۴۴ صفحه ۶۱ · تمرین — تقسیم توان‌های هم‌پایه با نمای گویا ۲۴
۴۵ صفحه ۶۱ · تمرین — محاسبهٔ توان‌های کسری ۲۴
۴۶ صفحه ۶۲ · فعالیت — مفهوم اتحاد ۲۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۷ صفحه ۶۲ · فعالیت — اتحاد مکعب مجموع ۲۵

۴۸ صفحه ۶۲ · فعالیت — مکعب تفاضل از راه دیگر ۲۵

۴۹ صفحه ۶۳ · کار در کلاس — ضرب و ساده کردن عبارت‌ها ... ۲۶

۵۰ صفحه ۶۳ · کار در کلاس — اتحاد مجموع و تفاضل مکعب‌ها ... ۲۶

۵۱ صفحه ۶۴ · کار در کلاس — تجزیه با اتحاد مکعب ۲۶

۵۲ صفحه ۶۴ · فعالیت — مضرب و شمارنده در عبارت‌های جبری ... ۲۶

۵۳ صفحه ۶۴ · فعالیت — مضرب بودن $27a^3 - 1$ ۲۷

۵۴ صفحه ۶۴ · فعالیت — عبارت‌های گویا ۲۷

۵۵ صفحه ۶۵ · فعالیت — مقدارهای تعریف‌نشدهٔ عبارت گویا ... ۲۸

۵۶ صفحه ۶۵ · فعالیت — جمع و تفریق عبارت‌های گویا ۲۸

۵۷ صفحه ۶۵ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت‌های گویا با تجزیه ... ۲۸

۵۸ صفحه ۶۵ · کار در کلاس — قرار دادن $a = \sqrt[3]{2x}$ در اتحاد ... ۲۹

۵۹ صفحه ۶۵ · فعالیت — گویا کردن مخرج (ضرب در رادیکال مناسب) ... ۲۹

۶۰ صفحه ۶۶ · فعالیت — گویا کردن مخرج با مزدوج ۲۹

۶۱ صفحه ۶۶ · فعالیت — اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها با رادیکال ... ۳۰

۶۲ صفحه ۶۷ · فعالیت — گویا کردن مخرج با ریشهٔ سوم ۳۰

۶۳ صفحه ۶۷ · تمرین — تجزیه عبارت‌ها ۳۰

۶۴ صفحه ۶۷ · تمرین — گویا کردن مخرج کسرها ۳۱

۶۵ صفحه ۶۷ · تمرین — محاسبهٔ حاصل‌ضرب‌ها با اتحاد ۳۱

۶۶ صفحه ۶۷ · تمرین — جمع و تفریق عبارت‌های گویا ۳۲

۶۷ صفحه ۶۷ · تمرین — کاربرد مزدوج ۳۲

۶۸ صفحه ۶۸ · خواندنی — سه‌تایی فیثاغورسی ۳۲

۶۹ صفحه ۶۸ · خواندنی — جادوی توان ۳۳

۷۰ صفحه ۶۸ · خواندنی — مثلث خیام ۳۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۴۸ — فعالیت

اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها:

$\sqrt[3]{(-27)} = -3 \Leftrightarrow (-3)^3 = -27$ ، $\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81$

... $(0/5)^2 = 0/25 \Leftrightarrow$ ... $\sqrt[3]{(-8)} = -2 \Leftrightarrow$ ... $(0/25)^2 = 0/0625 \Leftrightarrow$ ... $\sqrt[3]{125} = 5 \Leftrightarrow$ ... $(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow$

هر تساوی توانی $b^n = a$ با تساوی رادیکالی $\sqrt[n]{a} = b$ هم‌ارز است (اگر n زوج باشد، b باید نامنفی در نظر گرفته شود). پس:

- $(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$
- $5^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$
- $(0.25)^2 = 0.0625 \Leftrightarrow \sqrt{0.0625} = 0.25$
- $(-2)^3 = -8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$
- $(0.5)^2 = 0.25 \Leftrightarrow \sqrt{0.25} = 0.5$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۴۸ — کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 مترمکعب است.

ابتدا جدول را کامل کنید.

طول ضلع: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ حجم مکعب: ۱ ، ... ، ... ، ... ، ۱۲۵ ، ...

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

چون $8 < 25 < 27$ یعنی $2^3 < 25 < 3^3$، طول ضلع عددی بین ۲ و ۳ است و چون ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است، حدس می‌زنیم حدود ۲/۹ باشد. آزمایش: $2.9^3 = 24.389$ که کمی کمتر از ۲۵ است؛ پس طول ضلع کمی بزرگ‌تر از ۲/۹ است (حدود ۲/۹۲ متر) و مقدار دقیق آن $\sqrt[3]{25}$ است.

۳ صفحه ۴۹ — کار در کلاس

۲ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:

الف) چون ۲۵ < ۳۰ < ۳۶ پس ۵ < √۳۰ < ۶. همچنین چون ۸ < ۱۵ < ۲۷ پس ۲ < ∛۱۵ < ۳.

ب) √۱۰ پ) ∛(-۱۷) ت) ∛۲۰

ب) چون ۹ < ۱۰ < ۱۶ پس $۳ < \sqrt{۱۰} < ۴$.

پ) چون ۸ < ۱۷ < ۲۷ پس $۲ < \sqrt[۳]{۱۷} < ۳$ و در نتیجه $-۳ < \sqrt[۳]{-۱۷} < -۲$.

ت) چون ۸ < ۲۰ < ۲۷ پس $۲ < \sqrt[۳]{۲۰} < ۳$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴ صفحه ۴۹ کار در کلاس

دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به‌دست آورده‌اند: روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد: چون $۲^۳ = ۸$ و $۳^۳ = ۲۷$ و ۸ < ۲۵ < ۲۷ پس ۲ < ∛۲۵ < ۳. بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم.

$(۲/۸)^۳ = ۲/۸ \times ۲/۸ \times ۲/۸ = ۲۱/۹۵۲ \neq ۲۵$ ؟

محسن: ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد ۲/۹ را امتحان کنم. $(۲/۹)^۳ = ۲/۹ \times ۲/۹ \times ۲/۹ = ۲۴/۳۸۹ \approx ۲۴/۴ \neq ۲۵$ ؟

روش احمد: ابتدا با مکعب‌های کامل ۸ و ۲۷ تشخیص می‌دهد که ریشه بین ۲ و ۳ است. سپس عدد ۲/۸ را حدس می‌زند و مکعب آن را حساب می‌کند: ۲۱/۹۵۲ که از ۲۵ کمتر است؛ پس ۲/۸ هنوز کوچک است و ریشه بزرگ‌تر از ۲/۸ است. (روش «حدس و آزمایش».)

روش محسن: او توجه می‌کند که ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است، پس ریشه باید به ۳ نزدیک‌تر باشد و ۲/۹ را امتحان می‌کند: ۲۴/۳۸۹ که خیلی به ۲۵ نزدیک است ولی هنوز کمی کمتر از آن است؛ پس ریشه کمی بزرگ‌تر از ۲/۹ است (حدود ۲/۹۲). این روش با استفاده از نزدیکی به مکعب‌های کامل، حدس بهتری می‌زند.

هر دو روش تقریب‌هایی از $\sqrt[۳]{۲۵}$ می‌دهند؛ مقدار دقیق آن اعشاری پایان‌پذیر یا متناوب نیست و فقط با نماد $\sqrt[۳]{۲۵}$ نمایش داده می‌شود.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۳ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد نشان دهید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید): $\sqrt[3]{1}$ ، $\sqrt[3]{3}$ ، $\sqrt[3]{14}$ ، $\sqrt[3]{4}$ ، $\sqrt[3]{(-125)}$ ، $\sqrt[3]{(-8)}$ و ...

ریشه	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{14}$	$\sqrt[3]{(-8)}$	$\sqrt[3]{(-125)}$
مقدار	۱	≈ ۱/۴۴	≈ ۱/۵۹	≈ ۲/۴۱	-۲	-۵

برای نمایش، هر عدد را روی محور در جای مقدارش (برای ریشه‌های غیردقیق، به‌طور تقریبی) علامت می‌زنیم؛ مثلاً $\sqrt[3]{3}$ کمی بیشتر از ۱/۴ و $\sqrt[3]{14}$ کمی بیشتر از ۲/۴ است و $\sqrt[3]{(-8)}$ و $\sqrt[3]{(-125)}$ سمت چپ صفر، در ۲- و ۵- قرار می‌گیرند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۴ < \sqrt{\square} < ۵$ ب) $۹ < \sqrt[3]{\square} < ۱۰$

الف) باید $۴^2 < \square < ۵^2$ یعنی $۱۶ < \square < ۲۵$؛ مثلاً $\sqrt{۱۷}$ ، $\sqrt{۲۰}$ یا $\sqrt{۲۴}$ (هر عدد بین ۱۶ و ۲۵).

ب) باید $۹^3 < \square < ۱۰^3$ یعنی $۷۲۹ < \square < ۱۰۰۰$؛ مثلاً $\sqrt[3]{۸۰۰}$ یا $\sqrt[3]{۹۰۰}$ (هر عدد بین ۷۲۹ و ۱۰۰۰).

۷ صفحه ۵۰ کار در کلاس

۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

ضلع مکعب بزرگ $۴ = \sqrt[3]{۶۴}$ و ضلع مکعب کوچک $۳ = \sqrt[3]{۲۷}$ است. مکعب میانی باید از کوچک بزرگ‌تر و از بزرگ کوچک‌تر باشد، پس حجم آن بین ۲۷ و ۶۴ و ضلع آن عددی بین ۳ و ۴ است. مثلاً:

- ضلع ۳/۲ (حجم ۳۲/۷۶۸)
- ضلع ۳/۵ (حجم ۴۲/۸۷۵)
- ضلع ۳/۸ (حجم ۵۴/۹ ≈ یا $\sqrt[3]{۴۰}$ (≈ ۳/۴۲)

۸ صفحه ۵۰ فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم: $۲^۴ = ۱۶$ ، $(-۲)^۴ = ۱۶ \Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۱۶: ۲ و ۲- ؛ $۵^۴ = ۶۲۵$ ، $(-۵)^۴ = ۶۲۵ \Rightarrow$ ریشه‌های چهارم ۶۲۵: ۵ و ۵-

آیا ۱۶- ریشهٔ چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶- شود؟ اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ..... ریشهٔ چهارم است که ..... یکدیگرند. عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

نه؛ ۱۶- ریشهٔ چهارم ندارد، زیرا هر عدد (مثبت یا منفی) وقتی به توان ۴ برسد نامنفی می‌شود: $(\pm a)^۴ = a^۴ \geq ۰$ و هرگز برابر ۱۶- نمی‌شود.

تکمیل: هر عدد مثبت دارای **دو** ریشهٔ چهارم است که **قرینهٔ** یکدیگرند (مثل $\pm\sqrt[۴]{۱۶} = \pm ۲$). عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

۹ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد: ۱۶ ، ۶۲۵ ، ۱۰,۰۰۰ ، ۳۱۲۵ ، (دلخواه) ریشه‌های چهارم: ۲ و ۲- ، ۵ و ۵- ، ... ، ...

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	(دلخواه) ۸۱
ریشه‌های چهارم	۲ و ۲-	۵ و ۵-	۱۰ و ۱۰-	۳ و ۳-

برای عدد ۳۱۲۵ (که توان چهارم عدد درستی نیست): دو ریشهٔ چهارم $\pm\sqrt[۴]{۳۱۲۵} \approx \pm ۷.۴۸$ دارد (چون $۶۲۵ < ۳۱۲۵ < ۱۰^۴$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد: ۲۴۳- ، ۳۲- ، ... ؛ ریشهٔ پنجم: ... ، ... ، ۱- ، ۰ ، ۱ ، ۵ ، ۱۰

عدد	۲۴۳-	۳۲-	۱-	۰	۱	۳۱۲۵	۱۰۰۰۰۰
ریشهٔ پنجم	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۵	۱۰

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

چون $-243 = (-3)^5$ و $-32 = (-2)^5$ و برای ستون‌های بعد $3125 = 5^5$ و $100000 = 10^5$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۳ ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

باید داشته باشیم: $\sqrt[5]{a} = a \Rightarrow a = a^5 \Rightarrow a^5 - a = 0 \Rightarrow a(a^4 - 1) = 0$

پس $a = 0$ یا $a^4 = 1$ یعنی $a = 1$ یا $a = -1$ جواب: **۰ و ۱ و -۱**.

۱۲ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۴ محاسبه کنید. $\sqrt[5]{(1/100000)}$ ، $\sqrt[5]{(-0/00032)}$ ، $\sqrt[5]{(1/32)}$

- $\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$ چون $(\frac{1}{10})^5 = \frac{1}{100000}$
- $\sqrt[5]{-0.00032} = -0.2$ چون $(-0.2)^5 = -0.00032$
- $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$ چون $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۵۱ کار در کلاس

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای ..... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن ..... است.

هر عدد مثبت یا منفی دارای **یک** ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشهٔ پنجم آن **منفی** است.

۱۴ صفحه ۵۱ تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی موردنظر بین آن‌ها باشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$\sqrt{16}$ ، $\sqrt{20}$ ، $\sqrt[4]{400}$ ، $\sqrt{75}$ ، $\sqrt[3]{(-8)}$ ، $\sqrt[5]{400}$ ، $\sqrt[3]{(-90)}$ ، $\sqrt[3]{250}$ ، $\sqrt[5]{1}$ ، $-\sqrt[4]{20}$

عدد	نتیجه	دلیل
$\sqrt{16}$	۴	$16 = 4^2$
$\sqrt{20}$	بین ۴ و ۵	$16 < 20 < 25$
$\sqrt[4]{400}$	بین ۴ و ۵	$4^4 = 256 < 400 < 625 = 5^4$
$\sqrt{75}$	بین ۸ و ۹	$64 < 75 < 81$
$\sqrt[3]{-8}$	-۲	$(-2)^3 = -8$
$\sqrt[5]{400}$	بین ۳ و ۴	$3^5 = 243 < 400 < 1024 = 4^5$
$\sqrt[3]{-90}$	بین ۵- و ۴-	$64 < 90 < 125$
$\sqrt[3]{250}$	بین ۶ و ۷	$216 < 250 < 343$
$\sqrt[5]{1}$	۱	$1 = 1^5$
$-\sqrt[4]{20}$	بین ۳- و ۲-	$-3 < -\sqrt[4]{20} < -2 \Rightarrow 3^4 = 81 > 20 > 16 = 2^4$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵ صفحه ۵۲ تمرین

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$\sqrt{10}$ ، $\sqrt[3]{7}$ ، $\sqrt[4]{25}$ ، $\sqrt[5]{16}$ ، $\sqrt[5]{64}$

عدد	مقدار تقریبی
$\sqrt{10}$	۳/۲
$\sqrt[3]{7}$	۱/۹
$\sqrt[4]{25}$	۲/۲
$\sqrt[5]{16}$	۱/۷
$\sqrt[5]{64}$	۲/۳

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶ صفحه ۵۲ تمرین

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص‌شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص‌شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).

هر نقطهٔ a از محور بالا را به نقطهٔ $\sqrt[3]{a}$ روی محور پایین وصل می‌کنیم. چند مثال عددی:

- ۸ ← ۲ ، ۲۷ ← ۳ ، ۱ ← ۱ ، ۰ ← ۰
- -۸ ← -۲ ، -۲۷ ← -۳ ، -۱ ← -۱
- عددهای بین ۰ و ۱ (مثل ۰/۱۲۵ به عدد بزرگ‌تر از خودشان (۰/۵) وصل می‌شوند و عددهای بزرگ‌تر از ۱ به عدد کوچک‌تر از خودشان؛ برای عددهای منفی بین ۰ و ۱- برعکس: ۰/۱۲۵- به ۰/۵- وصل می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۵۲ تمرین

۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. a چه عددی می‌تواند باشد؟

ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

الف) $a > 1 \Leftrightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow a^3 > a \quad (a > 0) \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < a$ ؛ مثلاً $\sqrt[3]{8} = 2 < 8$

ب) $a(a-1)(a+1)=0 \Rightarrow a=a^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a}=a$ پس $a=0$ ، 1 یا -1.

پ) $0<a<1 \Leftrightarrow (a>0)\ a<\sqrt[3]{a}$ ؛ مثلاً $\sqrt[3]{0.125}=0.5>0.125$

ت) برای a منفی: $-1<a<0 \Rightarrow a<\sqrt[3]{a}$ (مثلاً $\sqrt[3]{-0.125}=-0.5<-0.125$) و $a<-1 \Rightarrow a>\sqrt[3]{a}$ (مثلاً $\sqrt[3]{-8}=-2>-8$).

---

۱۸ صفحه ۵۲ تمرین

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

شکل‌ها در متن موجود نیست؛ برای تشخیص هر رنگ از قاعده‌های زیر استفاده کنید a) عدد نقطهٔ بالا):

- اگر a منفی باشد، ریشهٔ چهارم وجود ندارد؛ پس فقط ریشه‌های سوم و پنجم (هر دو منفی) دیده می‌شوند.
- اگر $a>1$: هرچه ریشه بزرگ‌تر شود، حاصل کوچک‌تر و به ۱ نزدیک‌تر است: $\sqrt[5]{a}<\sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{a}<a>1$؛ پس نزدیک‌ترین نقطه به ۱ ریشهٔ پنجم است.
- اگر $0<a<1$: هرچه ریشه بزرگ‌تر شود، حاصل بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر است: $\sqrt[5]{a}<\sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{a}<a<1$؛ پس نزدیک‌ترین نقطه به ۱ باز هم ریشهٔ پنجم است.
- اگر $-1<a<0$: $\sqrt[5]{a}$ و $\sqrt[5]{a}$ هر دو منفی‌اند و $\sqrt[5]{a}$ از $\sqrt[3]{a}$ به ۰ نزدیک‌تر (بزرگ‌تر) است؛ برای $-1<a<0$ برعکس: $\sqrt[5]{a}$ از $\sqrt[3]{a}$ به ۱- نزدیک‌تر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۹ صفحه ۵۳ تمرین

۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ..... ریشه‌های چهارم عدد ..... می‌باشند.

ب) اگر $a^4=16$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $\sqrt[3]{(a^3)}+5$ برابر است با .....

الف) اعداد ۳ و **۳-** ریشه‌های چهارم عدد **۸۱** هستند، زیرا $(-3)^4=81=3^4$.

ب) از $a^4=16$ نتیجه می‌شود $a=2$ یا $a=-2$. چون $\sqrt[3]{a^3}=a$، مقدار عبارت $a+5$ است: اگر $a=2$ برابر **۷** و اگر $a=-2$ برابر **۳** می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰ صفحه ۵۳ | تمرین

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های «<»، «>» یا «=» را قرار دهید.

$(۰/۱)^۵ \square (۰/۱)^۳$ ، $(-۰/۱)^۵ \square (-۰/۱)^۳$ ، $(-۲)^۴ \square (-۲)^۵$ ، $۰/۱ \square \sqrt[5]{۰/۰۰۰۰۱}$

- $(۰.۱)^۵ = ۰.۰۰۰۰۱ < ۰.۰۰۱ = (۰.۱)^۳$
- $(-۰.۱)^۵ = -۰.۰۰۰۰۱ > -۰.۰۰۱ = (-۰.۱)^۳$
- $(-۲)^۴ = ۱۶ > -۳۲ = (-۲)^۵$
- $۰.۱ = \sqrt[5]{۰.۰۰۰۰۱}$ (چون $۰/۱^5 = ۰/۰۰۰۰۱$ پس علامت «=» است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱ صفحه ۵۴ | فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم: ۸ و ... ؛ ریشهٔ سوم: ۴ ؛ ریشه‌های چهارم: $\sqrt[4]{۶۴}$ و ... ؛ ریشهٔ پنجم: $\sqrt[5]{۶۴}$ ؛ ریشه‌های ششم: ... و ... ؛ ریشهٔ هفتم: $\sqrt[7]{۶۴}$ ؛ ریشه‌های هشتم: $\sqrt[8]{۶۴}$ و ...

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{۶۴}$ یا همان ..... و ..... هستند؛ زیرا $(...)^6 = (...)^6$. ۶۴ =

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟

به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$، دربارهٔ تعداد ریشه‌های nام a چه می‌توان گفت؟

ریشه	مقدار
دوم	۸ و ۸-
سوم	۴ (تنها یک ریشه)
چهارم	$\sqrt[4]{۶۴}$ و $-\sqrt[4]{۶۴}$
پنجم	$\sqrt[5]{۶۴}$ (تنها یک ریشه)
ششم	۲ و ۲-
هفتم	$\sqrt[7]{۶۴}$ (تنها یک ریشه)
هشتم	$\sqrt[8]{۶۴}$ و $-\sqrt[8]{۶۴}$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد **۲** و **۲-** هستند؛ زیرا $(-۲)^6 = ۲^6$. ۶۴ =

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ریشهٔ هفتم ۶۴ مانند ریشهٔ پنجم و سوم فقط یکی (مثبت) است و ریشه‌های هشتم ۶۴ مانند ریشه‌های دوم، چهارم و ششم دو تاست که قرینهٔ هم‌اند.

به‌طور کلی برای عدد مثبت (مثل ۶۴): اگر n فرد باشد، **یک** ریشهٔ nام (مثبت) و اگر n زوج باشد، **دو** ریشهٔ nام قرینهٔ هم دارد. همین برای هر عدد مثبت a نیز درست است.

۲۲ صفحه ۵۴ **فعالیت**

۲ جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشهٔ دوم: وجود ندارد ؛ ریشهٔ سوم: ۴- = $\sqrt[3]{(-64)}$ ؛ ریشهٔ چهارم: وجود ندارد ؛ ریشهٔ پنجم: $\sqrt[5]{(-64)}$ ؛ ریشهٔ ششم، هفتم، هشتم: ...

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان ..... برسد و مساوی ۶۴- شود.

دربارهٔ ریشه‌های nام ($n \in \mathbb{N}$) ۶۴- بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشهٔ nام a چه می‌توان گفت؟

ریشه	مقدار
دوم	وجود ندارد
سوم	۴-
چهارم	وجود ندارد
پنجم	$\sqrt[5]{-64} = -\sqrt[5]{64}$
ششم	وجود ندارد
هفتم	$\sqrt[7]{-64} = -\sqrt[7]{64}$
هشتم	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان **زوج** برسد و مساوی ۶۴- شود (هر عدد به توان زوج نامنفی است).

بحث: اگر n فرد باشد، ۶۴- دقیقاً یک ریشهٔ nام (منفی) دارد؛ اگر n زوج باشد، ریشهٔ nام ندارد. همین‌طور برای هر عدد منفی a: اگر n فرد باشد، **یک** ریشهٔ nام منفی دارد و اگر n زوج باشد، ریشهٔ nام **ندارد**.

۲۳ صفحه ۵۵ **فعالیت**

۳ جدول زیر را کامل کنید.

n زوج $a > 0$: $\sqrt[n]{a} = \dots$ و $-\sqrt[n]{a} = \dots$ ؛ n فرد $a > 0$: $\sqrt[n]{a} = \dots$ ؛ n زوج $a > 0$: $\dots$ ؛ n فرد $a > 0$: $\dots$

حالت	نتیجه	مثال
n زوج، $a > 0$	دو ریشهٔ nام: $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$	ریشه‌های چهارم ۸۱: $\sqrt[4]{81} = 3$ و -3
n فرد، $a > 0$	یک ریشهٔ nام مثبت: $\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[3]{27} = 3$
n زوج، $a < 0$	ریشهٔ nام وجود ندارد	$\sqrt[4]{-81}$ تعریف‌نشده
n فرد، $a < 0$	یک ریشهٔ nام منفی: $\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$

۲۴ صفحه ۵۵ **فعالیت**

۴ در سال نهم دیدید که برای هر دو عدد مثبت a و b: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[3]{}$ نیز برقرار می‌باشد؟ برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ مثال بزنید.

دربارهٔ $\sqrt[4]{}$ با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b ..... باشند. $\sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{16} = 2 \times 3 = \sqrt[4]{(81 \times 16)}$.۶

دربارهٔ $\sqrt[4]{ab}$ چه می‌توان گفت؟

دربارهٔ $\sqrt[5]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{ab}$: آیا a و b حتماً باید نامنفی باشند؟ مثالی از a و b نامنفی و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

ریشهٔ سوم: بله برقرار است، برای هر a و b (مثبت یا منفی). مثال: $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8} = 3 \times 2 = 6 = \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \times 27}$ و با عددهای منفی: $3 \times (-2) = -6 = \sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{(-8) \times 27}$.

ریشهٔ چهارم: چون ۴ زوج است، باید a و b **نامنفی** باشند تا ریشه‌ها تعریف شوند: $2 \times 3 = 6 = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16 \times 81}$ و در حالت کلی $(a, b \geq 0)$ $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}$.

ریشهٔ پنجم: لازم نیست نامنفی باشند. مثال با اعداد نامنفی: $\sqrt[5]{1} \times \sqrt[5]{32} = 2 = \sqrt[5]{1 \times 32}$. مثال با اعداد منفی: $2 = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{(-1) \times (-32)}$ و $2 = (-1) \times (-2) = \sqrt[5]{-1} \times \sqrt[5]{-32}$؛ تساوی برقرار است.

۲۵ صفحه ۵۵ **کار در کلاس**

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$\sqrt[7]{128}$ ، $-\sqrt[7]{128}$ ، $\sqrt[8]{256}$ ، $-\sqrt[9]{1}$ ، $\sqrt[4]{625}$ ، $-\sqrt[4]{0/0016}$ ، $-\sqrt[5]{(1/32)}$ ، $\sqrt[6]{0}$

- $\sqrt[7]{128} = 2$ (چون $128 = 2^7$) و $-\sqrt[7]{128} = -2$

- $\sqrt[8]{256} = 2$ (چون $256 = 2^8$)
- $-\sqrt[9]{1} = -1$
- $\sqrt[4]{625} = 5$
- $-\sqrt[4]{0.0016} = -0.2$ (چون $0.0016 = 0.2^4$)
- $-\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$
- $\sqrt[6]{0} = 0$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۶ صفحه ۵۵ کار در کلاس

با توجه به اینکه $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a \times b)}$، تساوی زیر را کامل کنید:

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{(2\times2\times2\times2\times2)} = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = ...^5 = ... = ...$

$2 = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{32}$

زیرا طبق تعریف ریشه، $2 = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5$. پس $2 = \sqrt[5]{32}$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۷ صفحه ۵۶ تمرین

درستی رابطهٔ $\sqrt[k]{(a^m)} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به k، m و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

k	m	a	$(\sqrt[k]{a})^m$	$\sqrt[k]{(a^m)}$
۳	۲	۸	$2^2 = 4$	$\sqrt[3]{64} = 4$
۴	۳	۱۶	$2^3 = 8$	$\sqrt[4]{4096} = 8$
۳	۳	-8	$(-2)^3 = -8$	$\sqrt[3]{-512} = -8$
۲	۴	۹	$3^4 = 81$	$\sqrt{9^4} = \sqrt{6561} = 81$

اثبات کلی: فرض کنید $b = \sqrt[k]{a}$، پس $b^k = a$. آنگاه $(b^m)^k = (b^k)^m = a^m$، یعنی b^m یک ریشهٔ kام a^m است و داریم $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۸ صفحه ۵۶ **فعالیت**

۱ جدول زیر را کامل کنید.

جدول: چهار حالت (a ≥ ۰ با n زوج و n فرد؛ a < ۰ با n زوج و n فرد) با a = ۲ و n = ۴ یا ۳ و a = −۲ و n = ۴ یا ۳ برای محاسبهٔ $\sqrt[n]{a^n}$.

اگر a ≥ ۰ از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که: $\sqrt[n]{a^n}$ = ... ؛ و اگر a < ۰ آنگاه برای n زوج $\sqrt[n]{a^n}$ = ... و برای n فرد $\sqrt[n]{a^n}$ = ...

حالت	محاسبه	نتیجه
a = ۲ ، n = ۴ (زوج)	$\sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{16}$	a = ۲
a = ۲ ، n = ۳ (فرد)	$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}$	a = ۲
a = −۲ ، n = ۴ (زوج)	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16}$	= −a = |a| ۲
a = −۲ ، n = ۳ (فرد)	$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8}$	a = −۲

اگر a ≥ ۰: $\sqrt[n]{a^n} = a$. اگر a < ۰: برای n زوج $\sqrt[n]{a^n} = -a = |a|$ و برای n فرد $\sqrt[n]{a^n} = a$.

---

۲۹ صفحه ۵۷ **فعالیت**

۲ جدول زیر را کامل کنید.

جدول: چهار حالت (a = ۱۶ ، n = ۴) ، (a = ۸ ، n = ۳) ، (a = −۱۶ ، n = ۴) ، (a = −۸ ، n = ۳) برای محاسبهٔ $(\sqrt[n]{a})^n$.

اگر a ≥ ۰ آنگاه $(\sqrt[n]{a})^n$ = ... و اگر a < ۰ آنگاه $(\sqrt[n]{a})^n$ = ...

حالت	محاسبه	نتیجه
a = ۱۶ ، n = ۴	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4$	a = ۱۶
a = ۸ ، n = ۳	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3$	a = ۸
a = −۱۶ ، n = ۴	$\sqrt[4]{-16}$	تعریف‌نشده
a = −۸ ، n = ۳	$(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3$	a = −۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

اگر $a \geq 0$ آنگاه $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ؛ و اگر $a > 0$ (و n فرد، تا ریشه تعریف شود) باز هم $(\sqrt[n]{a})^n = a$ است (برای n زوج و a منفی عبارت تعریف نشده است).

۳۰ صفحه ۵۷ **کار در کلاس**

تساوی زیر به‌ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟ $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{(a^n)}$

اگر n فرد باشد، هر دو طرف برابر a هستند و تساوی همیشه برقرار است. اگر n زوج و $a \geq 0$ باشد نیز هر دو طرف برابر a هستند.

تساوی فقط وقتی برقرار **نیست** که **n زوج و a منفی** باشد: در این حالت $\sqrt[n]{a}$ تعریف نشده است، در حالی که $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ عددی نامنفی است (مثلاً $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ ولی $\sqrt[4]{-2}$ وجود ندارد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۱ صفحه ۵۷ **تمرین**

۱ الف) یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ یا $=$ را در $\square$ قرار دهید.

$(0/5)^3 \square (0/5)^2$ ، $\sqrt[3]{0/5} \square \sqrt{0/5}$ ، $4^3 \square 4^2$ ، $\sqrt[3]{4} \square \sqrt{4}$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید: $a^3 \square a^2$ ، $\sqrt[3]{a} \square \sqrt{a}$

پ) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید: $a^3 \square a^2$ ، $\sqrt[3]{a} \square \sqrt{a}$

الف) $(0.5)^3 = 0.125 < 0.25 = (0.5)^2$ ؛ $\sqrt{0.5} \approx 0.707 < \sqrt[3]{0.5} \approx 0.794$ ؛ $4^3 = 64 > 16 = 4^2$ ؛ $\sqrt{4} = 2 > \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

ب) برای $0 < a < 1$: $a^3 < a^2$ و $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$.

پ) برای $a > 1$: $a^3 > a^2$ و $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۳۲ صفحه ۵۷ **تمرین**

۲ الف) یکی از علامت‌های $<$ ، $=$ ، $>$ را در مربع قرار دهید.

$(-۰/۵)^{۳} \square (-۰/۵)^{۲}$ ، $(-۲)^{۳} \square (-۲)^{۲}$

$(-۰/۵)^{۵} \square (-۰/۵)^{۳}$ ، $(-۲)^{۵} \square (-۲)^{۳}$

$(-۰/۵)^{۲} \square (۰/۵)^{۴}$ ، $(-۲)^{۲} \square (-۲)^{۴}$

- $(-۰.۵)^{۳} = -۰.۱۲۵ < (-۰.۵)^{۲} = ۰.۲۵$ و $(-۲)^{۳} = -۸ < (-۲)^{۲} = ۴$
- $(-۰.۵)^{۵} = -۰.۰۳۱۲۵ < (-۰.۵)^{۳} = -۰.۱۲۵$ و $(-۲)^{۵} = -۳۲ < (-۲)^{۳} = -۸$
- $(۰.۵)^{۴} = ۰.۰۶۲۵ < (-۰.۵)^{۲} = ۰.۲۵$ و $(-۲)^{۲} = ۴ < (-۲)^{۴} = ۱۶$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۳ صفحه ۵۸ تمرین

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ nام (اگر $b^n = a$ آنگاه $b = \sqrt[n]{a}$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط بامعنا بودن رادیکال) رابطهٔ زیر برقرار است: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

فرض کنیم $b = \sqrt[n]{a}$. طبق تعریف، $\sqrt[n]{a}$ عددی است که توان nام آن برابر a است، یعنی $b^n = a$. حال b را به جای $\sqrt[n]{a}$ می‌گذاریم:

$$(\sqrt[n]{a})^n = b^n = a \blacksquare$$

---

۳۴ صفحه ۵۸ تمرین

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴، ۳ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

خیر، به‌طور کلی برقرار نیست. مثال‌های نقض:

- $n = ۳$ ، $a = ۸$ ، $b = ۱$: $\sqrt[۳]{۸} + \sqrt[۳]{۱} = ۳$ ولی $\sqrt[۳]{۹} \approx ۲.۰۸$
- $n = ۴$ ، $a = ۱۶$ ، $b = ۶۵$: $\sqrt[۴]{۱۶} + \sqrt[۴]{۶۵} \approx ۲ + ۲.۸۴ = ۴.۸۴$ ولی $\sqrt[۴]{۸۱} = ۳$
- $n = ۵$ ، $a = ۱$ ، $b = ۳۱$: $\sqrt[۵]{۱} + \sqrt[۵]{۳۱} \approx ۱ + ۱.۹۹ = ۲.۹۹$ ولی $\sqrt[۵]{۳۲} = ۲$

(تنها در حالت‌های خاص مثل $a = ۰$ یا $b = ۰$ برقرار است.)

---

۳۵ صفحه ۵۸ تمرین

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

نمونه: $\sqrt[۳]{(-۱/۱۲۵)} = \sqrt[۳]{(-۱)} / \sqrt[۳]{۱۲۵} = -۱/۵$

$\sqrt[4]{(1/81)}$ ، $\sqrt[7]{(1/128)}$ ، $\sqrt[5]{(-1/32)}$

- $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{-1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \frac{1}{\sqrt[7]{128}} = \frac{1}{2}$
- $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۶ صفحه ۵۸ تمرین

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{(a/b)} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{(a/b)} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$ برقرار نباشد.

الف) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$: $n = 3,\ a = 8,\ b = 27$ (برای n فرد یا a, b مثبت همواره برقرار است.)

ب) $n = 2,\ a = -4,\ b = -9$: $\sqrt{\frac{-4}{-9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ سمت چپ تعریف‌شده است ولی سمت راست $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}}$ بی‌معناست (ریشهٔ زوج عدد منفی)؛ پس در حالت n زوج و a و b منفی تساوی برقرار نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۷ صفحه ۶۰ فعالیت

هریک از عبارت‌های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

$۲^{۱/۳}$ ، $۳^{۱/۲} = \sqrt{۳}$ ، $۴^{۱/۴} = \sqrt[۴]{۴} = \sqrt[۴]{۲^۲} = \sqrt{۲}$ ، $۵^{۱/۷} = \sqrt[۷]{۵}$ ، $۶^{۱/۴} = \sqrt[۴]{۶}$ ، $۸۱^{۱/۴} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۳$

قاعده: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ؛ فقط وقتی عدد زیر رادیکال توان کامل باشد، حاصل عدد گویاست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۸ صفحه ۶۰ | فعالیت

اکنون شما اعداد تواندار زیر را به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

الف) $۵^{۲/۵}$ **ب)** $۷^{۲/۳}$ **پ)** $۸۱^{۳/۴}$ **ت)** $۱۶^{-۱/۴}$

طبق تعریف $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ و $a^{-m/n}=\frac{۱}{a^{m/n}}$:

الف) $۵^{۲/۵}=\sqrt[۵]{۵^۲}=\sqrt[۵]{۲۵}$

ب) $۷^{۲/۳}=\sqrt[۳]{۷^۲}=\sqrt[۳]{۴۹}$

پ) $۸۱^{۳/۴}=(\sqrt[۴]{۸۱})^۳=۳^۳=۲۷$

ت) $۱۶^{-۱/۴}=\frac{۱}{۱۶^{۱/۴}}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۱۶}}=\frac{۱}{۲}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۹ صفحه ۶۱ | کار در کلاس

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

نمونه: $۵^{۲/۳}=\sqrt[۳]{۲۵}=\sqrt[۳]{(۵^۲)}=$

$۴^{۱/۵}=...$ ، $۳^{-۴/۵}=...$ ، $۱۶^{۳/۴}=...$ ، $۸^{۲/۳}=...$

- $۴^{۱/۵}=\sqrt[۵]{۴}$
- $۳^{-۴/۵}=\frac{۱}{۳^{۴/۵}}=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۳^۴}}=\frac{۱}{\sqrt[۵]{۸۱}}$
- $۱۶^{۳/۴}=(\sqrt[۴]{۱۶})^۳=۲^۳=۸$
- $۸^{۲/۳}=(\sqrt[۳]{۸})^۲=۲^۲=۴$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۰ صفحه ۶۱ | کار در کلاس

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

نمونه: $\sqrt[۳]{(۷^۲)}=۷^{۲/۳}$ $\sqrt[۵]{۱۹}=...$ $\sqrt[۵]{۶۴}=...$ $\sqrt[۵]{(۵^۲)}=...$

- $\sqrt[۵]{۱۹}=۱۹^{۱/۵}$
- $\sqrt[۵]{۶۴}=\sqrt[۵]{۲^۶}=۲^{۶/۵}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

- $\sqrt[5]{5^2} = 5^{2/5}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۱ صفحه ۶۱ | کار در کلاس

۳ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ است. تساوی را کامل کنید. ($a > 0$)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

و $a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$. پس ترتیب گرفتن ریشه‌ها مهم نیست و ریشهٔ mnام همان مقدار را می‌دهد.

۴۲ صفحه ۶۱ | تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

$16^{1/2}$ ، $5^{1/2}$ ، $7^{3/4}$ ، $125^{-2/3}$ ، $32^{-1/5}$ ، $32^{2/5}$ ، $125^{2/3}$

- $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$
- $5^{1/2} = \sqrt{5}$
- $7^{3/4} = \sqrt[4]{7^3} = \sqrt[4]{343}$
- $125^{-2/3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{125})^2} = \frac{1}{25}$
- $32^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \frac{1}{2}$
- $32^{2/5} = (\sqrt[5]{32})^2 = 4$
- $125^{2/3} = (\sqrt[3]{125})^2 = 25$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۳ صفحه ۶۱ | تمرین

۲ می‌دانیم $a^{(2/4)} = a^{(1/2)}$ و $\sqrt[4]{(a^2)} = \ldots$. آیا تساوی $\sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[nk]{(a^{mk})}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ (m، n و k طبیعی‌اند.) نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{4}$ و $\sqrt[6]{8}$ برابرند.

بله: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ (ساده کردن کسر نما).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

بنابراین: $\sqrt{۲} = ۲^{۱/۲}$ ؛ $۲^{۱/۲} = ۲^{۲/۴} = (۲^{۲})^{۱/۴} = ۴^{۱/۴} = \sqrt[۴]{۴}$ ؛ $۲^{۱/۲} = ۲^{۳/۶} = (۲^{۳})^{۱/۶} = ۸^{۱/۶} = \sqrt[۶]{۸}$. پس هر سه با هم برابرند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۴ صفحه ۶۱ تمرین

۳ فرض کنیم $a = ۶۴$ ، $r = ۱/۲$ و $s = ۱/۳$. مقدارهای a^r/a^s و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای a^r/a^s و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. (می‌توانید از ماشین‌حساب کمک بگیرید.) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نمونه: $\frac{۶۴^{۱/۲}}{۶۴^{۱/۳}} = \frac{۸}{۴} = ۲$ و $۶۴^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}} = ۶۴^{۱/۶} = ۲$ (چون $۶۴ = ۲^۶$)؛ برابرند.

a	r	s	a^r / a^s	a^{r-s}
۸۱	۱/۲	۱/۴	$۹ \div ۳ = ۳$	$۸۱^{۱/۴} = ۳$
۳۲	۳/۵	۱/۵	$۸ \div ۲ = ۴$	$۳۲^{۲/۵} = ۴$
۸	۲/۳	۱/۳	$۴ \div ۲ = ۲$	$۸^{۱/۳} = ۲$

نتیجه: $a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s}$ ؛ قاعدهٔ تقسیم توان‌های هم‌پایه برای نماهای گویا نیز برقرار است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۵ صفحه ۶۱ تمرین

۴ حساب کنید. ۵^(...) = ... ، $\sqrt[۳]{۶۴} = ...$ ، $\sqrt[۴]{۸۱} = ...$

- $\sqrt[۳]{۶۴} = ۶۴^{۱/۳} = ۴$
- $\sqrt[۴]{۸۱} = ۸۱^{۱/۴} = ۳$
- برای عبارت اول (که در متن موجود ناخوانا است) از قاعدهٔ $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$ استفاده کنید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۶ صفحه ۶۲ فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی $(a+b)^2 = a^2 + ۲ab + b^2$ (۱) اتحاد گفته می‌شود؟

(مثال: اگر $a = ۱/۵$ و $b = ۳$ اختیار شود، $(۳ + ۱/۵)^۲ = ۱/۵^۲ + ۲\times(۱/۵)\times۳ + ۳^۲ \Rightarrow ۲۵۶/۲۵ = ۲۵۶/۲۵$ یا اگر در رابطهٔ (۱) به جای b، $-b$ قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم: $(a - b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ (۲). اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به‌دست آورید.

چون تساوی (۱) به‌ازای **هر** مقدار دلخواه a و b (هر دو عدد) برقرار است و هر دو طرف آن همیشه مقدار یکسانی دارند؛ به چنین تساوی‌ای «اتحاد» می‌گوییم (برخلاف معادله که فقط به‌ازای برخی مقدارها درست است).

مثلاً با $a = \frac{۱}{۵}$ ، $b = ۳$: $\frac{۲۵۶}{۲۵} = \left(\frac{۱۶}{۵}\right)^۲ = \left(\frac{۱}{۵} + ۳\right)^۲$ و $\frac{۲۵۶}{۲۵} = \frac{۱+۳۰+۲۲۵}{۲۵} = ۹ + ۳\times\frac{۱}{۵} + ۲\times\frac{۱}{۲۵}$.

با جایگزینی b با $-b$ در (۱): $(a - b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ و اتحاد (۳): $(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲$.

---

۴۷ صفحه ۶۲ **فعالیت**

۱ با محاسبهٔ $(a + b)^۳$ اتحاد دیگری به‌دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$(a + b)^۳ = (a + b)^۲(a + b) = (\ldots\ldots)(a + b) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

میتوانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به‌دست آوریم: $(a - b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲(-b)$

$+ \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + ۳a(-b)^۲ + (-b)^۳ = a^۳ - b^۳$

$(a + b)^۳ = (a + b)^۲(a + b) = (a^۲ + ۲ab + b^۲)(a + b)$

$= a^۳ + a^۲b + ۲a^۲b + ۲ab^۲ + ab^۲ + b^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$

با $b \to -b$: $(a - b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲(-b) + ۳a(-b)^۲ + (-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$

یعنی جاهای خالی: $۳a^۲b$ و $۳ab^۲$.

---

۴۸ صفحه ۶۲ **فعالیت**

۲ یک بار دیگر $(a - b)^۳$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شمارهٔ (۲) محاسبه کنید.

$(a - b)^۳ = (a - b)^۲(a - b) = (\ldots\ldots)(a - b) = \ldots\ldots$

$(a - b)^۳ = (a - b)^۲(a - b) = (a^۲ - ۲ab + b^۲)(a - b)$

$= a^۳ - a^۲b - ۲a^۲b + ۲ab^۲ + ab^۲ - b^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$

که با نتیجهٔ قبل یکی است.

تیزهوشان توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۹ صفحه ۶۳ کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+$ ..... = ...

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$ .....

$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳-a^۲b+ab^۲+a^۲b-ab^۲+b^۳=a^۳+b^۳$

$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳+a^۲b+ab^۲-a^۲b-ab^۲-b^۳=a^۳-b^۳$

۵۰ صفحه ۶۳ کار در کلاس

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های a^3+b^3 و a^3-b^3 را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به‌دست آورید.

از نتیجهٔ پرسش ۱ (با تعویض دو طرف):

$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$

$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

این‌ها اتحادهای «مجموع مکعب‌ها» و «تفاضل مکعب‌ها» هستند.

۵۱ صفحه ۶۴ کار در کلاس

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

نمونه: $8x^3-27=(2x)^3-3^3=(2x-3)[(2x)^2+2x\times3+3^2]=(2x-3)(4x^2+6x+9)$

$x^3+1=$ ... $x^3-8=$ ... $x^3-125=$ ... $x^6-1=$ ...

- $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$
- $x^۳-۸=x^۳-۲^۳=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$
- $x^۳-۱۲۵=x^۳-۵^۳=(x-۵)(x^۲+۵x+۲۵)$
- $x^۶-۱=(x^۳-۱)(x^۳+۱)=(x-۱)(x^۲+x+۱)(x+۱)(x^۲-x+۱)$

۵۲ صفحه ۶۴ فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به خاطر دارید: ۱۲ × ۳ = ۴ ... در اتحاد مزدوج $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک عامل (شمارنده) a^2-b^2 است. آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به‌دست می‌آیند؛ مثلاً بعضی از مضرب‌های $a+b$: ... $(a+b)(a-b)$, $-۴(a+b)$, $(a+b)^۲$, $۲(a+b)$. بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارندهٔ هر یک از آن‌ها باشد.

بله؛ هر حاصل‌ضرب $a+b$ در یک عبارت دیگر مضرب آن است: مثلاً $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ و $۵(a+b)$.

۱) بعضی از مضرب‌های $a-b$: $-(a-b)=b-a$, $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$, $(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$, $(a-b)^۲$, $۳(a-b)$

۲) مثلاً $a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$ و $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$ (یا $۵a-۵b$).

---

۵۳ صفحه ۶۴ **فعالیت**

۳ عبارت $۱۲۷a^3-$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-۱$ ب) $۱۳a-$ پ) $۱۹a^2+۳a+$ ت) $۱۳a+$

$$۲۷a^۳-۱=(۳a)^۳-۱^۳=(۳a-۱)(۹a^۲+۳a+۱)$$

پس $۱۲۷a^3-$ مضرب عبارت‌های **(ب) $۱۳a-$** و **(پ) $۱۹a^2+۳a+$** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۴ صفحه ۶۴ **فعالیت**

۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟ (عبارت گویا: خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای)

الف) $\frac{۳}{۷}$ ب) $\frac{x}{x-۲}$ پ) $\frac{۳-x}{۱}$ ت) $\frac{x^۲+۲x-۳}{x+۱}$

عبارت گویا کسری است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند (متغیر زیر رادیکال یا با نمای کسری نداشته باشد).

- الف) ۳/۷ : نسبت دو عدد ثابت (چندجمله‌ای درجهٔ صفر) است، پس گویا است.
- ب) $x/(x-۲)$: نسبت دو چندجمله‌ای است، پس گویا است.
- پ) $۳-x=(۳-x)/۱$: چندجمله‌ای است و هر چندجمله‌ای را می‌توان با مخرج ۱ نوشت، پس گویا است.
- ت) $(x^2+۲x-۳)/(x+۱)$: نسبت دو چندجمله‌ای است، پس گویا است.

هر عبارتی که در آن متغیر زیر رادیکال (مثل $\sqrt{x}$ باشد، گویا نیست. (صورت اصلی گزینه‌ها در متن موجود ناخوانا بود؛ گزینه‌ها بازسازی شده‌اند.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۵ صفحه ۶۵ فعالیت

نکته: یک عبارت گویا به‌ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد (مقدار ندارد).

۵ عبارت گویای زیر به‌ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟ $\frac{۱}{x+۱} - \frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{x^۲-۱}$

مخرج‌ها نباید صفر شوند: $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$ ، $x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$ و $x^۲-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$.

پس عبارت به‌ازای $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف نمی‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۶ صفحه ۶۵ فعالیت

۶ حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x+۱} - \frac{۲}{x^۲-۱}$

ب) $\frac{۱}{x-۱} + \frac{۲}{x+۱} - \frac{۳}{x^۲-۱}$

الف) $\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x+۱} - \frac{۲}{x^۲-۱} = \frac{(x+۱)-(x-۱)-۲}{x^۲-۱} = \frac{۰}{x^۲-۱} = ۰$

ب) $\frac{(x+۱)+۲(x-۱)-۳}{x^۲-۱} = \frac{۳x-۴}{x^۲-۱}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۷ صفحه ۶۵ کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{۶x+۶}{x^۲+۲x+۱}$ **ب)** $\frac{x^۲-۱}{۳x-۳}$ **پ)** $\frac{x+۲}{x^۲-۴}$ **ت)** $\frac{y^۳-۴y}{y^۲+۲y}$

الف) $\frac{۶}{x+۱} = \frac{۶(x+۱)}{(x+۱)^۲}$ $(x \neq -۱)$

ب) $\frac{x+۱}{۳} = \frac{(x-۱)(x+۱)}{۳(x-۱)}$ $(x \neq ۱)$

پ) $\frac{۱}{x-۲} = \frac{x+۲}{(x-۲)(x+۲)}$ $(x \neq \pm ۲)$

ت) $y-۲ = \frac{y(y-۲)(y+۲)}{y(y+۲)}$ $(y \neq ۰$ و $y \neq -۲)$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۸ صفحه ۶۵ | کار در کلاس

۲ در اتحاد $a^۳ + ۱ = (a + ۱)(a^۲ - a + ۱)$ **قرار دهید** $a = \sqrt[۳]{۲x}$ **و حاصل را بازنویسی کنید:**

$(\sqrt[۳]{۲x})^۳ + ۱ = (...)(...)$

چون $(\sqrt[۳]{۲x})^۳ = ۲x$ و $a^۲ = (\sqrt[۳]{۲x})^۲ = \sqrt[۳]{۴x^۲}$:

$(\sqrt[۳]{۲x} + ۱)(\sqrt[۳]{۴x^۲} - \sqrt[۳]{۲x} + ۱) = ۲x + ۱$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۹ صفحه ۶۵ | فعالیت

۱ از سال گذشته به یاد داریم که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را در یک عبارت رادیکالی مناسب ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود. در زیر کسرهای $۵/(۲\sqrt{۳})$ و $۴/\sqrt[۳]{۲}$ گویا شده‌اند. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$\frac{۵}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲ \times ۳} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\frac{۴}{\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۴}{\sqrt[۳]{۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۲^۲}} = \frac{۴\sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{۸}} = \frac{۴\sqrt[۳]{۴}}{۲} = ۲\sqrt[۳]{۴}$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۰ صفحه ۶۶ | فعالیت

۲ دو عبارت مانند $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ که شامل مجموع و تفاضل دو قسمت یکسان هستند را مزدوج یکدیگر می‌گوییم. حاصل‌ضرب این دو عبارت را می‌توانیم به‌صورت محاسبه کنیم:

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^۲ - (\sqrt{b})^۲ = a - b$ **. از این روش برای گویا کردن مخرج کسرها استفاده می‌کنیم. مانند نمونه (گویا کردن** $\frac{۲}{\sqrt{۵} + \sqrt{۳}}$ **) مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.**

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۵} - \sqrt{۳}}$ **ب)** $\frac{۸}{۳\sqrt{۲} + ۴}$ **پ)** $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ **ت)** $\frac{h}{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}$

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۵} - \sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۵} + \sqrt{۳}}{\sqrt{۵} + \sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۵} + \sqrt{۳}}{۵ - ۳} = \frac{\sqrt{۵} + \sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\frac{۸}{۳\sqrt{۲} + ۴} \times \frac{۳\sqrt{۲} - ۴}{۳\sqrt{۲} - ۴} = \frac{۸(۳\sqrt{۲} - ۴)}{۱۸ - ۱۶} = ۴(۳\sqrt{۲} - ۴) = ۱۲\sqrt{۲} - ۱۶$

پ) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

ت) $\frac{h}{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \frac{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h} = \sqrt{x + h} + \sqrt{x}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۱ صفحه ۶۶ — فعالیت

۳ از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها که به‌صورت زیر هستند، برای گویا کردن کسرهایی مانند $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}$ استفاده می‌کنیم. در هرکدام از اتحادهای زیر، قرار دهید $x=\sqrt[۳]{a}$ و $y=\sqrt[۳]{b}$ و آن‌ها را بازنویسی کنید.

$$(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=x^۳-y^۳ \Rightarrow (\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\dots)=\dots$$

$$(x+y)(x^۲-xy+y^۲)=x^۳+y^۳ \Rightarrow (\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\dots)=\dots$$

آیا سمت راست تساوی‌های بالا شامل یک عبارت رادیکالی است؟

$$(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a-b$$

$$(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a+b$$

خیر؛ سمت راست $(a-b)$ یا $(a+b)$ رادیکال ندارد، پس با ضرب صورت و مخرج در عامل مناسب مخرج گویا می‌شود. مثلاً:

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱$$

۶۲ صفحه ۶۷ — فعالیت

مانند نمونهٔ بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}+۱}$ **ب)** $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}$ **پ)** $\frac{۸}{\sqrt[۳]{x}+۲}$ **ت)** $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

الف)
$$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۵}+۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵}+۱}{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵}+۱}=\frac{۳(\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵}+۱)}{۵+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۵}+۱}{۲}$$

ب)
$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۲۱}+\sqrt[۳]{۹}}{۷-۳}=\frac{\sqrt[۳]{۴۹}+\sqrt[۳]{۲۱}+\sqrt[۳]{۹}}{۴}$$

پ)
$$\frac{۸}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{۸(\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{x+۸}$$

ت)
$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{x-۱}$$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۳ صفحه ۶۷ — تمرین

۱ هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^4 - y^4$ **ب)** $x^6 - y^6$ **پ)** $27a^3 + 8$ **ت)** $8a^3 - b^6$

الف) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

ب) $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

پ) $27a^3 + 8 = (3a)^3 + 2^3 = (3a + 2)(9a^2 - 6a + 4)$

ت) $8a^3 - b^6 = (2a)^3 - (b^2)^3 = (2a - b^2)(4a^2 + 2ab^2 + b^4)$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۴ صفحه ۶۷ تمرین

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}}$ **ب)** $\frac{3}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}$ **پ)** $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}$ **ت)** $\frac{6}{2\sqrt{2} - 1}$

الف) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}} \times \frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{49}} = \frac{3\sqrt[3]{49}}{7}$

ب) $\frac{3}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}} = \frac{3(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{5 + 3} = \frac{3(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{8}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}{x - 2}$

ت) $\frac{6}{2\sqrt{2} - 1} \times \frac{2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} + 1} = \frac{6(2\sqrt{2} + 1)}{8 - 1} = \frac{6(2\sqrt{2} + 1)}{7}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۵ صفحه ۶۷ تمرین

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل‌ضرب‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

نمونه: $15^2 - 1 = (15 + 1)(15 - 1) = 16 \times 14 = 224$ ،

الف) 105^3 **ب)** 105^2 **پ)** 9999^2

الف)

$105^3 = (100 + 5)^3 = 100^3 + 3(100)^2(5) + 3(100)(5)^2 + 5^3 = 1000000 + 150000 + 7500 + 125 = 1157625$

ب) $105^2 = (100 + 5)^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$

پ) $9999^2 = (10000 - 1)^2 = 100000000 - 20000 + 1 = 99980001$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۶ صفحه ۶۷ تمرین

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۵}{x^۲-۱}-\frac{۲}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}$ **ب)** $\frac{x^۲-۱}{x-۱}-\frac{x^۳-۱}{x-۱}$

الف) $\frac{۳(x-۲)}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۳x-۶}{x^۲-۱}=\frac{(x+۱)+۲(x-۱)-۵}{x^۲-۱}$

ب) $x^۲=\frac{x^۲(x-۱)}{x-۱}=\frac{x^۳-۱-x^۲+۱}{x-۱}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۷ صفحه ۶۷ تمرین

۵ اگر $\sqrt{x+۴}-\sqrt{x-۲}=۲$ **، حاصل عبارت** $\sqrt{x+۴}+\sqrt{x-۲}$ **را به‌دست آورید.**

حاصل‌ضرب مزدوج‌ها: $(\sqrt{x+۴}-\sqrt{x-۲})(\sqrt{x+۴}+\sqrt{x-۲})=(x+۴)-(x-۲)=۶$.

پس $(\sqrt{x+۴}+\sqrt{x-۲})\times ۲=۶$ و $\sqrt{x+۴}+\sqrt{x-۲}=۳$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۸ صفحه ۶۸ خواندنی

سه عدد ۳، ۴ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا $۵^۲=۴^۲+۳^۲$. یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

نمونه‌ها: $(۶,۸,۱۰)$ ، $(۵,۱۲,۱۳)$ ، $(۸,۱۵,۱۷)$ ، $(۷,۲۴,۲۵)$ ، $(۹,۴۰,۴۱)$ ، $(۲۰,۲۱,۲۹)$. (مثلاً $۱۳^۲=۱۶۹=۱۴۴+۲۵$.)

هر ضرب صحیح از یک سه‌تایی فیثاغورسی نیز سه‌تایی فیثاغورسی است و بی‌شمار سه‌تایی وجود دارد؛ مثلاً از رابطهٔ $(m^۲+n^۲)^۲=(m^۲-n^۲)^۲+(۲mn)^۲$ (برای $m>n$ طبیعی) می‌توان آن‌ها را ساخت.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۶۹ صفحه ۶۸ خواندنی

(جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد: $(۱/۰۱)^{365} = ۳۷/۸$ و $(۰/۹۹)^{365} = ۰/۰۳$ چرا این‌قدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(۱/۰۱)^{730}$ و $(۰/۹۹)^{730}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

چون در توان‌های بزرگ، ضرب‌های پیاپی در عددی بزرگ‌تر از ۱ (۱/۰۱) هر بار مقدار را اندکی بزرگ‌تر و ضرب در عددی کوچک‌تر از ۱ (۰/۹۹) هر بار اندکی کوچک‌تر می‌کند و اثر این تغییرهای کوچک روی هم انباشته می‌شود (رشد و کاهش نمایی).

محاسبه با ماشین‌حساب: $(1.01)^{۷۳۰} \approx ۱۴۲۷.۶$ و $(0.99)^{۷۳۰} \approx ۰.۰۰۰۶۵$. یعنی اگر هر روز یک درصد بهتر شویم، پس از دو سال حدود ۱۴۲۸ برابر می‌شویم، ولی اگر هر روز یک درصد بدتر شویم، تقریباً به صفر می‌رسیم. (همچنین $(1.01)^{۷۳۰} = ((1.01)^{۳۶۵})^{۲} \approx ۳۷.۸^{۲}$.)

۷۰ صفحه ۶۸ خواندنی

(مثلث خیام) $(a+b)^1 = a + b$ ، $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ؛ سطرها: ۱؛ ۱۱؛ ۱۲۱؛ ۱۳۳۱؛ ۱۴۶۴۱.

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟ می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید. $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (.....)(a+b)$ .....

ضرایب بسط $(a+b)^n$ دقیقاً اعداد سطر nام مثلث خیام (پاسکال) هستند؛ هر عدد مجموع دو عدد بالایی آن است.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ضرایب ۱، ۴، ۶، ۴، ۱ همان سطر بعدی مثلث خیام است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت